

Kleine Knobelkiste 2

Wiegen und Verwiegen, Irren und Verwirren

Auf dieser ersten Seite stelle ich Ihnen nur drei kleine Rätsel vor, wobei ich die Rätsel mit den Kugeln am interessantesten finde, vor allem auch deswegen, weil sich daraus auch noch weitere Fragen ableiten lassen, die man durchaus mathematisch verallgemeinern könnte ...

Zwei Eimer und vier Liter Wasser

Sie besitzen zwei Eimer. In einen der Eimer passen genau drei Liter, in den anderen genau fünf Liter. Diese beiden Eimer haben aber leider keine Maßangaben, sondern nur die Markierung für das jeweilige Maximalvolumen. Sie benötigen aber genau vier Liter Wasser. Wie gehen Sie dabei vor? Übrigens ist die Wassermenge, die Sie zum Abmessen benötigen, nicht limitiert.

Neun Kugeln und eine Balkenwaage

Jemand gibt Ihnen 9 gleichgroße Kugeln, von denen eine Kugel schwerer ist als die anderen. Sie sollen nun herausfinden, welches die schwerere Kugel ist; dabei dürfen Sie nur mit einer Balkenwaage wiegen, um die Kugel zu identifizieren. Wie gehen Sie dabei vor - und wie viele Wiegevorgänge sind nötig?

Zwölf Kugeln und eine Balkenwaage

Sie haben 12 gleichgroße Kugeln bekommen, bei denen eine Kugel ist, die entweder schwerer oder leichter als die anderen ist. Mit Hilfe einer einfachen Balkenwaage sollen Sie durch höchstens dreimaliges Wiegen herausfinden, welches die Kugel mit der Massendifferenz ist und Sie sollen bestimmen, ob die Kugel schwerer oder leichter ist. Wie gehen Sie dabei vor? Tipp: Markieren Sie sich die Kugeln virtuell mit roter, gelber und blauer Farbe. ;-)

Die Lösungen finden Sie ab Seite 2.

Lösung:
Zwei Eimer und vier Liter Wasser

Version 1: Der 3-Liter-Eimer wird mit Wasser gefüllt und in den 5-Liter-Eimer umgeschüttet. Danach füllt man noch einmal den 3-Liter-Eimer auf und gießt so lange in den 5-Liter-Eimer, bis die Maximalmarkierung für 5 Liter erreicht ist. Danach hat man exakt 1 Liter im 3-Liter-Eimer. Jetzt wird der 5-Liter-Eimer geleert und der Inhalt des 3-Liter-Eimers in den 5-Liter-Eimer umgefüllt. Danach füllt man den 3-Liter-Eimer erneut voll und gießt diesen in den 5-Liter-Eimer. Nun sind 4 Liter im 5-Liter-Eimer und die Aufgabe ist gelöst. **Version 2:** Man füllt zuerst den 5-Liter-Eimer und gießt damit den 3-Liter-Eimer voll. Damit bleiben 2 Liter im 5-Liter-Eimer. Nun schüttet man den Inhalt des 3-Liter-Eimers weg. Danach füllt man die 2 Liter aus dem 5-Liter-Eimer in den 3-Liter-Eimer um. Der 5-Liter-Eimer wird jetzt noch einmal gefüllt und der 3-Liter-Eimer wird aus dem 5-Liter-Eimer bis auf 3 Liter nachbefüllt. Jetzt sind im 5-Liter-Eimer genau 4 Liter Wasser - und die Aufgabe ist gelöst. Und zum Schluss noch was zum Rechnen: Welche Version ist die sparsamere hinsichtlich des Wasserverbrauchs hinsichtlich des weggeschütteten Wassers? :-)

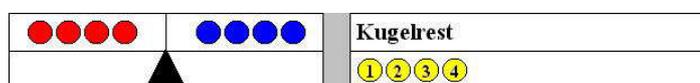
Lösung:
Neun Kugeln und eine Balkenwaage

Sie legen drei Kugeln auf die linke Seite der Balkenwaage, drei Kugeln auf die rechte Seite. Bleibt die Waage im Gleichgewicht, so befindet sich die schwerere Kugel bei den drei noch nicht aufgelegten. Von den drei noch nicht aufgelegten Kugeln legen Sie je eine Kugel in die geleerte linke, eine in die geleerte rechte Waagschale. Die Seite, auf der die Waagschale nach unten geht, enthält die schwerere Kugel, ist jedoch die Waage im Gleichgewicht, so ist die übrig gebliebene Kugel, die noch nicht aufgelegt war, die schwerere. Sofern beim ersten Wiegen die Waagschale auf einer Seite nach unten geht, liegt dort die schwerere Kugel dabei. In dem Fall nehmen Sie die Kugeln aus der Waagschale, die nach oben ging, heraus und legen dort eine Kugel aus der Waagschale, die nach unten ging, auf. Aus der Waagschale, die jetzt noch immer unten ist, nehmen Sie noch eine Kugel weg. Bleibt die Waagschale unten, so liegt dort die schwerere Kugel, geht jedoch die Waagschale auf der anderen Seite nach unten, so liegt die gesuchte Kugel in der betreffenden Waagschale. Sollte die Waage ins Gleichgewicht kommen, so ist die zuletzt weggenommene Kugel die gesuchte Kugel, die schwerer ist als die anderen. Und nun noch eine Zusatzfrage: Wie gehen Sie vor, wenn Sie nicht wissen, ob die gesuchte Kugel schwerer oder leichter ist als die anderen Kugeln? Reichen dann zwei Wiegevorgänge noch immer aus? :-)

Lösung:
Zwölf Kugeln und eine Balkenwaage

Sie bilden 3 Gruppen mit jeweils 4 Kugeln. Für das erste Wiegen legen Sie die Kugeln der beiden ersten Gruppen auf, und zwar in die linke Waagschale die 4 Kugeln der einen Gruppe, in die rechte Waagschale die 4 Kugeln der zweiten Gruppe. Die Erkenntnisse des Wiegens werden exemplarisch anhand der folgenden Wiegebildchen beschrieben. Allerdings werde ich Ihnen hier nur die Möglichkeiten beschreiben, die Sie nach der Ausgangssituation, dass also beim ersten Wiegen ein Gleichgewicht bei den gewogenen Kugeln herrscht, denkbar sind und untersucht werden müssen.

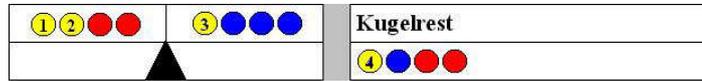
Bild 1:



Wiegen 1 - Fall 1 - Gleichgewicht

Sind die Waagschalen im Gleichgewicht, wissen wir bereits jetzt, dass sich die Kugel mit der noch unbekanntem Massendifferenz bei den noch übrigen 4 (gelben) Kugeln befinden muss. Wir haben so die Zahl der zu untersuchenden Kugeln auf 1/3 reduziert. Beim zweiten Wiegen sollten wir nun wenigstens eine eindeutige Information über die mögliche Kugel bzw. die mögliche Ausschlagrichtung der Gewichts-differenz erhalten.

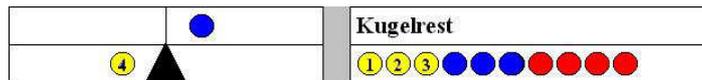
Bild 2:



Wiegen 2 - Fall 1 - Gleichgewicht

Die ausgelegten roten und blauen Kugeln weisen also keine Gewichts-differenz auf. Wir lassen nun 1 der noch nicht gewogenen Kugeln am Rand liegen, legen aber auf die linke Waagschale 2 der noch nicht gewogenen (gelben) Kugeln, die 1 und die 2, auf die rechte Seite legen wir 1 (gelbe) Kugel, die 3. Da auf jeder Seite der Balkenwaage 4 Kugeln liegen müssen, damit wir ein aussagekräftiges Ergebnis erhalten, füllen wir die Lücken mit den roten und den blauen Kugeln (ohne Gewichts-differenz). Bleibt die Waage nun im Gleichgewicht, so haben wir mit dem zweiten Wiegen die betreffende Kugel mit der Gewichts-differenz herausgefunden, in diesem Fall die 4. Aber ist diese Kugel nun leichter oder schwerer als die anderen?

Bild 3:



Wiegen 3 - Fall 1 - Waagschale links geht (hier) nach unten

Wir haben herausgefunden, dass die Kugel 4 diejenige ist, die eine Gewichts-differenz aufweist. Da alle anderen Vergleichskugeln (z. B. die roten und die blauen) gleich schwer sind, legen wir die (gelbe) 4 auf eine Seite der Waage, eine beliebige Vergleichskugel auf die andere. Geht die Waage auf der Seite nach unten, auf der die einzige bisher noch ungewogene Kugel (die gelbe 4) liegt, so muss diese schwerer sein, geht die Waage auf der Seite nach oben, so ist sie augenscheinlich leichter (siehe Bild 4).

Bild 4:



Wiegen 3 - Fall 2 - Waagschale links geht (hier) nach oben

Wie schon unter Bild 3 beschrieben, lässt sich hier die Gewichts-differenz direkt ablesen. Geht die Waagschale mit der identifizierten Kugel nach oben, so ist die Kugel leichter, geht die Waagschale nach unten, so ist die Kugel schwerer (siehe Bild 3) als alle anderen.

Bild 5:

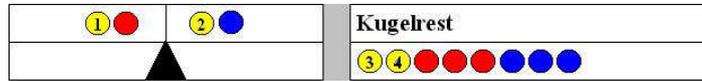


Wiegen 2 - Fall 2 - Waagschale links geht (hier) nach unten

Nun kann es beim zweiten Wiegen aber auch passieren, dass die Waage nicht mehr im Gleichgewicht ist. Die Kugel mit der Gewichts-differenz liegt auf jeden Fall auf der Waage auf, denn die roten und die blauen Kugeln sind ja bekanntlich (nach unserem ersten Wiegen in diesem Beispiel)

gleich schwer. Wir haben noch 3 Kugeln auf der Waage, für die es zutrifft, dass sie die schwerere oder leichtere Kugel ist. Eine gewisse Einschränkung, die besagt, was auf welche Kugel zutreffen kann, gibt es aber schon: bei den (gelben) Kugeln 1 und 2 kann die gesuchte Kugel sein, und diese müsste dann schwerer als die anderen sein, möglich ist aber auch, dass die (gelbe) Kugel 3 leichter als die anderen Kugeln ist.

Bild 6:



Wiegen 3 - Fall 1 (aus Wiegen 2, Fall 2) - Gleichgewicht

Wir nehmen nun die (gelbe) Kugel 3, die eventuell die zu identifizierende leichtere Kugel sein könnte, von der Waage und legen diese bei den Kugelrest. Wir legen nun die beiden (gelben) Kugeln, die vorher auf derselben Seite der Waage lagen, jeweils zusammen mit einer Vergleichskugel (bekanntermaßen ohne Gewichtsdivergenz) in die beiden Waagschalen. Nun kann nicht mehr allzu viel passieren, denn wir können ab sofort genau feststellen, welches die gesuchte Kugel ist ... und in welche Richtung die Gewichtsdivergenz abweicht. Bleibt die Waage diesmal wieder im Gleichgewicht, so muss die (gelbe) Kugel 3, die in Bild 5 auf der rechten (oberen) Waagschale lag, die gesuchte Kugel sein, und diese ist dann zweifelsfrei leichter; beim Wiegen in Bild 6 konnten wir ja sehen, dass auch die (gelben) Kugeln 1 und 2 gleich schwer sein müssen.

Bild 7:



Wiegen 3 - Fall 2 (aus Wiegen 2, Fall 2) - Waagschale links geht (hier) nach unten

In Bild 5 lagen die beiden (gelben) Kugeln auf der Seite der Waagschale, die nach unten ging. Beim jetzigen Wiegen liegt noch immer eine Kugel in der Waagschale, die unten ist. Es existiert ja nur eine Kugel mit einer Gewichtsdivergenz. Legt man (wie in diesem Beispiel) die (gelbe) Kugel 2 mit einer Vergleichskugel auf die andere Seite der Waage, so kann diese Kugel nicht plötzlich leichter sein als vorher, dann nämlich wäre beim Wiegen in Bild 5 die linke Waagschale oben und nicht unten gewesen. In Bild 7 ist also die (gelbe) Kugel 1 die gesuchte Kugel - und diese ist dann schwerer als die anderen.

Bild 8:



Wiegen 3 - Fall 3 (aus Wiegen 2, Fall 2) - Waagschale links geht (hier) nach oben

Analog zu Bild 7 kann sich jetzt nur noch ergeben, dass die gesuchte Kugel die (gelbe) Kugel 2 ist, die dann ebenfalls schwerer als die anderen Kugeln sein muss. Dabei haben wir bis hierher nur das Wiegen aus Bild 5 weitergeführt.

Bild 9:



Wiegen 2 - Fall 3 - Waagschale links geht (hier) nach oben

Wie schon in Bild 6, 7 und 8 beschrieben ist, können wir den dritten Wiegevorgang für diese Aus-

gangssituation ebenfalls entsprechend abarbeiten. Bei den (gelben) Kugeln 1 und 2 kann die gesuchte Kugel sein, die leichter ist, oder aber die (gelbe) Kugel 3 ist die gesuchte schwerere Kugel. Verteilen wir die Kugeln erneut wie in Bild 6 beschrieben, so können wir die gleichen Schlüsse ziehen, dieses Mal jedoch unter der Prämisse, dass bei den beiden noch zu untersuchenden (gelben) Kugeln 1 und 2 eine dabei ist, die möglicherweise leichter ist als die anderen ...

In Bild 1 gingen wir davon aus, dass die Waage beim ersten Wiegen im Gleichgewicht ist. Ist die Waage nicht im Gleichgewicht, so haben wir insgesamt nur 4 sichere Kugeln, von denen wir eindeutig wissen, dass sie weder leichter noch schwerer sind als die anderen. Wir lassen nun auf der linken Seite, die angenommenerweise nach unten geht, zwei der dort liegenden Kugeln (z. B. rote) liegen, legen 1 Kugel an den Rand und nehmen eine blaue Kugel von rechts dazu. Umgekehrt geben wir eine (rote) Kugel von links nach rechts; wir füllen die Seiten auf jeweils 4 Kugeln mit den (gelben) Vergleichskugeln auf.

Merken Sie, dass es ohne graphische Untermalung nun schon ein gutes Stück komplizierter aussieht als es ist, denn man sollte die Erklärungen in Bilder fassen können. Welche Farben liegen auf den Waagschalen - und in welcher Verteilung? Auf der linken Seite haben wir 2 der ursprünglich dort liegenden roten Kugeln, 1 blaue Kugel von rechts und eine Vergleichskugel vom Rand. Auf der rechten Seite der Waage haben wir 2 (gelbe) Vergleichskugeln liegen, eine ursprünglich dort abgelegte blaue Kugel sowie eine rote Kugel von links. Das hilft uns doch schon weiter - oder?!

Ist die Waage jetzt im Gleichgewicht, so muss nun entweder eine der beiden blauen Kugeln am Rande die leichtere Kugel sein, oder aber die am Rand liegende rote Kugel ist die schwerere (bitte immer an die Ausgangssituation denken). Wenn wir jetzt die Kugeln wieder gemischt auflegen (ähnlich wie in Bild 6), so lässt sich die Kugel identifizieren und auch die Richtung der Gewichts-differenz ermitteln. Analog dazu verfahren wir, wenn die Waagschale einmal auf der linken Seite, dann auf der rechten Seite unten ist. Schließlich haben wir aufgrund der Ausgangssituation schon eine Richtung für den Ausschlag der Gewichts-differenz erkennen können.

Doch dieses Beispiel werde ich Ihnen hier jetzt gewiss nicht bis zum Ende vorbeten, womöglich noch mit Wiegebildchen wie oben. Nehmen Sie sich doch einfach Block und Bleistift - und ergründen Sie die elementarste Basis des logischen Denkens selbst – denn nur selber denken macht schlau.

Viel Spaß dabei!

Verwendungshinweis

Die unveränderte Weitergabe dieses Dokumentes ist gestattet. Auch die Verwendung einzelner Passagen oder Graphiken aus diesem Dokument ist unter Berücksichtigung der Quellenangabe erlaubt. Nicht gestattet ist die Verbreitung des Dokumentes oder einzelner Passagen bzw. Graphiken aus diesem Dokument im Zusammenhang mit Inhalten, Darstellungen, Aufforderungen und Äußerungen sexistischer, rassistischer, volksverhetzender, religiös diskriminierender oder sonst gesetzeswidriger Ausprägung. *Frank Lencioni*

E-Mail: Frank@Lencioni.de / Web: <http://Frank.Lencioni.de>